# Sujet de stage – M2
# Réseaux booléens degré-bornés.

**Titre :** Réseaux booléens degré-bornés.

**Encadrants :** Florian Bridoux et Adrien Richard — `richard@unice.fr` — page-perso.

**Lieu :** Laboratoire I3S, UMR CNRS 71-271, Université Côte d'Azur, Sophia Antipolis.

**Sujet :** Les *réseaux d'automates* modélisent des ensembles *finis* d'entités simples évoluant dans un *temps discret* et sur des *domaines finis*, selon des règles d'évolution *locales*. Ils trouvent de nombreuses applications – en biologie, sociologie ou informatique – car, malgré leur simplicité, ils engendrent une grande diversité de comportements dynamiques, faisant d'eux un cadre unificateur pour l'étude des systèmes complexes. Leur théorie relie des domaines variés – théorie des graphes, de la complexité, combinatoire, entre autres – et pose des questions fondamentales sur les relations entre structure, règles locales et comportements émergents.

On considère dans ce stage les *réseaux booléens*, c'est-à-dire les réseaux d'automates à $n$ entités binaires, notées de 1 à $n$. La dynamique est alors décrite par les itérations d'une fonction $f$ de l'ensemble des vecteurs binaires à $n$ composantes dans lui-même :

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n, \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

La fonction locale de l'entité $i$ est la $i$-ème composante de $f$, notée $f_i$, qui est une fonction booléenne à $n$ composantes, de $\{0,1\}^n$ dans $\{0,1\}$.

Afin de vraiment "*localiser*" les fonctions locales, on impose ici la contrainte que chaque fonction $f_i$ doit dépendre d'au plus $d$ composantes, où $d$ est une constante fixée. On dit alors que le réseau est *$d$-degré-borné*. C'est une contrainte *naturelle* lorsque l'on étudie la question de l'émergence de *comportements globaux riches* à partir de *calculs locaux simples*, ici modélisés par des fonctions $f_i$ qui ne dépendent que de $d$ composantes au plus.

De plus, cette contrainte est extrêmement *forte* : le nombre de réseaux booléens à $n$ composantes est *doublement exponentiel* en $n$ – c'est exactement $(2^{2^n})^n$ – alors que le nombre de réseaux booléens à $n$ composantes $d$-degré-bornés est *simplement exponentiel* en $n$ : il est inférieur à $2^{n^2}(2^{2^d})^n$.

Mais bien que cette contrainte naturelle soit très forte, paradoxalement, on ne sait presque rien dire sur ses conséquences dynamiques [1]. Le stage consiste donc à avancer dans la compréhension de ces conséquences. C'est un sujet très ouvert, où une multitude de directions peuvent être prises : quelques pistes seront proposées au/à la stagiaire – exemple : une permutation circulaire de $\{0,1\}^n$ peut-elle être $d$-degré-bornée ? –, mais il/elle pourra également explorer ses propres idées.

[1] J. Aracena, F. Bridoux, M. Gadouleau, P. Guillon, K. Perrot, A. Richard, G. Theyssier, On the Dynamics of Bounded-Degree Automata Networks, 2024. lien arXiv